Гущин Д. Д.

ВСТРЕЧИ С ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКОЙ

Аннотация

В работе представлен план проведения мини-курса по финансовой математике для учащихся 8–11 классов, проявляющих интерес к разработке, анализу и применению математических алгоритмов в экономике. Курс ориентирован на развитие у учащихся умений строить математические модели экономических ситуаций, исследовать эти модели, получать и интерпретировать выводы. Особенностью курса является его нацеленность на анализ реальных экономических проблем и практическую значимость результатов, получаемых в ходе учебной деятельности. Особое внимание уделено подбору задачного материала: большая часть задач взята из реальной экономической практики; часть — из материалов математических и экономических олимпиад, а также заданий для подготовки к единому государственному экзамену последних лет.

СОДЕРЖАНИЕ

Гущин Дмитрий Дмитриевич

Работа заняла 1 место на конкурсе лучших учебно-методических разработок по преподаванию основ финансовой грамотности Министерства образования и науки Российской Федерации, Издательского дома «Учительская газета» при поддержке Проекта Министерства финансов Российской Федерации «Содействие повышению уровня финансовой грамотности населения и развитию финансового образования в Российской Федерации».

Веб-страница курса с актуальными материалами: http://reshuege.ru/course?id=2610
Издание 2, дополненное. — 05.04.2016

Санкт-Петербург
2016

Вводные замечания

Предлагаемый мини-курс состоит из четырех больших занятий, которые не являются уроками в классическом понимании этого слова. Прежде всего, они рассчитаны на серьезный самостоятельный труд учащихся. Важной составляющей обучения является домашняя деятельность учащихся, связанная с поиском информации в различных источниках, ее самостоятельный анализ и осмысление; заметное внимание в курсе уделяется умению анализировать документы. Для этого к каждому занятию дается предварительное домашнее задание — задание к занятию. В зависимости от возраста и уровня подготовки учащихся каждое из занятий можно разбить на два-три урока, при этом целесообразно чередовать занятия с индивидуальными консультациями, во время которых учащиеся рассказывают учителю о своем продвижении в изучении материала, сообщают о проделанной работе, обсуждают интересующие их вопросы.

Занятие 1: простые проценты, налоги

Задание к занятию. Повторите понятия доли и процента, вспомните, как находить процент от числа и число по его проценту. Проверьте свою готовность к занятию, решив задачи 1–9, выполните задание 10.

1. Найдите 12% от 120.
2. Найдите 120% от 12.
3. Найдите число, если 12% от него равны 120.
4. Найдите число, если 120% от него равны 12.
5. Сколько процентов 12 составляет от 120?
6. На сколько процентов 12 меньше 120?
7. Сколько процентов составляет 120 от 12?
8. На сколько процентов 120 больше 12?

Ответы:	**1.** 14,4.	**2.** 14,4.	**3.** 1000.	**4.** 10.
	5. 10%.	**6.** 90%.	**7.** 1000%.	**8.** 900%.

9. Анализируя задания 1 и 2, выскажите гипотезу, запишите ее формулой.
10. Прочитайте текст из учебника по экономической теории.

Номинальная заработная плата — это денежное выражение заработной платы (сумма денег) за определенный период времени (час, день, месяц, год).

Реальная заработная плата — это количество товаров и услуг, которые можно приобрести на номинальную зарплату. Реальная зарплата зависит, во-первых, от уровня номинальной зарплаты и, во-вторых, от уровня цен на товары и услуги.

Показателем, позволяющим определить изменение реальной заработной платы за тот или иной период времени, является индекс реальной заработной платы. Индекс — это относительная (выраженная в процентах) величина, количественно характеризующая изменение данного процесса по сравнению с определенным периодом времени, который принимается за базовый.

При умеренной инфляции изменение уровня реальной заработной платы примерно равно разности индекса номинальной зарплаты и процентного изменения уровня цен:

$$ИРЗ = ИНЗ - ПИЦ.$$

В общем случае индекс реальной заработной платы рассчитывается как отношение индекса номинальной заработной платы к индексу потребительских цен:

$$ИРЗ = \frac{ИНЗ}{ИПЦ} \cdot 100\%.$$

Подобным образом рассчитываются индексы других реальных доходов: стипендий, пенсий, пособий и т. д. Динамику индексов реальных доходов учитывают при индексации доходов населения.

Выделите в тексте незнакомые понятия, найдите их значения в достоверных источниках. Если у вас возникнут вопросы — запишите их. Используя формулы, приведенные в учебнике, рассчитайте индекс реальной зарплаты, если: а) номинальная зарплата по сравнению с предыдущим годом увеличилась со 150 руб. в час до 175 руб. в час, а инфляция составила 2%, б) номинальная зарплата выросла на 15%, а индекс потребительских цен составил 120%.

Ход занятия. Учащиеся рассказывают о выполнении домашнего задания. Особое внимание следует уделить работе с документом. Учителю необходимо постоянно работать над тем, чтобы научить учащихся выявлять незнакомые понятия и находить информацию о них. Готовясь к занятию, учащиеся должны были поставить перед собой вопрос о том, что такое инфляция, какая инфляция считается умеренной, что такое индекс потребительских цен, кто и как его вычисляет, как связан ИПЦ с инфляцией и т. д. При обсуждении домашнего задания учитель может показать на экране таблицу ИПЦ http://base.garant.ru/149900/ и попросить учащихся проанализировать ее.

Кроме того, необходимо убедиться, что все учащиеся верно понимают, как находить процент от числа и число по его проценту, а также понимают эквивалентность утверждений «больше на 10%» и «больше в 1,1 раза», «меньше на 75%» и «меньше в 4 раза». Взаимосвязь этих утверждений можно записать в виде формул (*):

если величина A больше величины B на p%, то $A = B + \frac{p}{100}B = (1+0,01p)B,$

если величина A меньше величины B на p%, то $A = B - \frac{p}{100}B = (1-0,01p)B.$

Эти соотношения являются основными во всем курсе, проверить их понимание и осознанное применение можно на примере следующих задач.

Задание 1. Четыре рубашки дешевле куртки на 8%. На сколько процентов пять рубашек дороже куртки?

Арифметическое решение. Цена четырех рубашек составляет 92% цены куртки. Значит, цена одной рубашки составляет 23% цены куртки. Поэтому цена пяти рубашек составляет 115% цены куртки. Это превышает цену куртки на 15%.

Алгебраическое решение. Пусть цена одной рубашки P, а цена куртки K. Тогда в силу формул (*) имеем: $4P = 0,92K \Leftrightarrow P = 0,23K \Leftrightarrow 5P = 1,15K,$ то есть 5 рубашек дороже куртки на 15%.

Задание 2. Семья состоит из отца, матери и их дочери-студентки. Если бы зарплата отца увеличилась вдвое, общий доход семьи вырос бы на 67%. Если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, общий доход семьи сократился бы на 4%. Сколько процентов от общего дохода семьи составляет зарплата матери?

Решение. Условие «если бы зарплата отца увеличилась вдвое, доход семьи вырос бы на 67%» означает, что зарплата отца составляет 67% дохода семьи. Условие «если бы стипендия дочери уменьшилась втрое, доход семьи сократился бы на 4%», означает, что 2/3 стипендии составляют 4% дохода семьи, то есть вся стипендия дочери составляет 6% дохода семьи. Таким образом, доход матери составляет $100\% - 67\% - 6\% = 27\%$ дохода семьи.

Примечание для учителя. Это задание может оказаться достаточно трудным для учащихся. Полезно рассмотреть с ними аналогичную задачу, решив ее предыдущим образом и сравнив решение с приведенным ниже.

Задание 3. Семья Ивановых ежемесячно вносит плату за коммунальные услуги, телефон и электричество. Если бы коммунальные услуги подорожали на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 35%. Если бы электричество подорожало на 50%, то общая сумма платежа увеличилась бы на 10%. Какой процент от общей суммы платежа приходится на телефон?

Решение. Если все три вида услуг подорожали бы на 50%, то общая сумма платежа увеличится на 50%. Но из-за того, что платеж за услуги телефонии останется неизменным, общая сумма платежа после подорожания по остальным двум видам услуг будет на $50\% - 35\% - 10\% = 5\%$ меньше. Эти 5% — доля телефонии в числе 50% оплаты за все услуги. Тем самым, доля оплаты за телефон составляет 5/50 или 10% от общей суммы.

Убедившись, что учащиеся владеют понятием процент и умеют применять его в простейших заданиях, можно переходить к решению более сложных задач. Следующие задачи учащиеся решают в парах, затем представляют свое решение.

Задание 4. Число сотрудников предприятия увеличилось на 25%, а фонд зарплаты увеличился на 60%. На сколько процентов увеличилась заработная плата, если она одинакова у всех сотрудников?

Решение. Разделим 1,6 на 1,25, получим 1,28. Зарплата увеличилась на 28%.

Задание 5. В то время как цены увеличились на 12%, зарплата месье *X* увеличилась на 22%. Насколько увеличилась его покупательная способность?

Решение. Рассмотрим прежнюю зарплату месье *X*. Без ее увеличения его покупательная способность уменьшилась бы в отношении 1/(1+0,12). После увеличения зарплаты его покупательная способность повысилась в

$$\frac{1+0,22}{1+0,12} = \frac{1,22}{1,12} \approx 1,09 \text{ раза}$$

или примерно на 9%.

Примечание для учителя. Заметим, что задача сводится к вычислению индекса реальной зарплаты, формулы для которого учащиеся анализировали при подготовке к занятию. Если учащиеся еще не спросили, почему индекс вычисляется именно таким образом, сейчас самое время обсудить это с ними.

Задание 6. Директор предприятия, на котором работают 8 человек, планирует с нового года увеличить фонд зарплаты с 500 000 до 800 000 рублей в месяц, при этом необходимо принять на работу двух новых сотрудников. Как изменится номинальная зарплата старых сотрудников? Каков будет индекс реальной зарплаты, если дополнительно известно, что индекс потребительских цен по отношению к предыдущему году составит 115%.

Решение. Зарплата сотрудников будет повышена с $500\,000 : 8 = 62\,500$ руб. до 800 000 : 10 = 80 000 руб., что составляет 28%. Найдем индекс реальной зарплаты:

$$ИРЗ = \frac{128}{115} \cdot 100\% \approx 111,3\%.$$

Это означает, что реальная зарплата сотрудников вырастет примерно на 11,3%.

Примечание. Следует обратить внимание на то, что разность индекса номинальной зарплаты и процентного изменения уровня цен 128% – 115% = 13% даст завышенный уровень индекса реальной зарплаты, и это завышение тем более существенно, чем выше индекс потребительских цен.

Задание 7. По прогнозу экспертов, цены на квартиры в Москве через год упадут: в рублях на 20%, в евро на 40%. А в Сочи цены в рублях упадут на 10%. На сколько процентов упадут цены в Сочи в евро?

Решение. Согласно прогнозу, через год цены на квартиры в Москве составят в рублях 0,8 части той, которая есть в текущем году, в евро — 0,6 части. Соответствующие цены в Сочи: 0,9 части в рублях и $(1-0,01x)$ части в евро, где x — падение цены в процентах. Курс евро по отношению к рублю в Москве и в Сочи считаем одинаковым, тогда верна пропорция:

$$\frac{0,8}{0,6}=\frac{0,9}{1-0,01x}.$$

Откуда

$$\frac{4}{3}=\frac{90}{100-x}\Leftrightarrow 400-4x=270\Leftrightarrow 4x=130\Leftrightarrow x=32,5.$$

Тем самым, цены на жилье в Сочи должны упасть на 32,5%.

Вторая часть занятия посвящена применению понятия процент к расчетам налогов. Уместно начать ее с рассмотрения трех опорных задач.

Задание 8. Зарплата работника составляет 30 000 руб., налог на доходы 13%. Сколько рублей останется после уплаты налога?

Решение: у работника останется 87% зарплаты или 26 100 руб.

Задание 9. После уплаты 13% налога на доходы работник получил 30 450 руб. Каков доход работника?

Решение: работнику было начислено 30 450 : 0,87 = 35 000 руб.

Задание 10. Какую зарплату необходимо начислить работнику, чтобы после уплаты 13% налога он получал 30 000 руб.?

Решение: необходимо начислить 30 000 : 0,87 ≈ 34 483 руб., тогда работник получит 30 000 руб. 21 коп.

Учитель сообщает, что 13% налога на доходы физических лиц (НДФЛ) — прямой федеральный налог Российской Федерации, который платят лица, являющиеся налоговыми резидентами Российской Федерации (фактически находящиеся на территории России не менее 183 календарных дней в течение 12 следующих подряд месяцев), а также лица, не являющиеся налоговыми резидентами Российской Федерации, в случае получения дохода на территории России. На экране демонстрируются ставки налога: 9%, 13%, 15%, 30%, 34% и условия их применения, размещенные на официальном сайте Федеральной налоговой службы https://www.nalog.ru/rn77/taxation/taxes/ndfl/.

В различных странах используются разные шкалы налогообложения, в частности, многие страны используют прогрессивную шкалу. Проанализируем применение прогрессивной многоступенчатой шкалы на примере задачи 11, применение налогообложения работников, работающих по найму, в задаче 12 и индивидуальных предпринимателей — в задаче 13.

Задание 11. В некоторой стране подоходный налог начисляется следующим образом: с суммы, не превышающей 1000 денежных единиц, взимается 15%, с дохода от 1000 до 2000 денежных единиц с первой тысячи взимается 15%, а с оставшейся суммы взимается 25%, если же доход превышает 2000 единиц, то с первой тысячи взимается 15%, со второй 25%, а с оставшейся суммы взимается 50%. Сколько процентов подоходного налога выплачивает гражданин этой страны, получающий после его выплаты зарплату в 2600 денежных единиц?

Решение. Заметим, что, если после выплаты налога зарплата превышает 2000 денежных единиц, то до выплаты она тем более превышала 2000 единиц. Пусть зарплата до выплаты налога составляла $2000+x$ денежных единиц. Тогда сумма выплаченного налога равна $1000\cdot 0,15+1000\cdot 0,25+0,5x=400+0,5x$, откуда получим:

$$2600+400+0,5x=2000+x\Leftrightarrow 0,5x=1000\Leftrightarrow x=2000.$$

Таким образом, зарплата гражданина до выплаты налога составляла 4000 денежных единиц, сумма выплаченного налога — 1400 денежных единиц, а выплаченный налог составляет $(1400/4000)\cdot 100=35\%$ заработка.

Задача 12. Граждане России с полученных доходов платят НДФЛ 13%. Если гражданин трудоустроен, НДФЛ удерживается работодателем. При этом сами работодатели уплачивают за работника отчисления от его дохода: в Пенсионный фонд 22%, в Фонд социального страхования 2,9%, в Федеральный фонд обязательного медицинского страхования 5,1%.

ООО решило разработать компьютерную программу и хочет нанять программиста. На разработку программы ООО ежемесячно готово выделять 100 тыс. рублей. Рабочее место и оборудование для работы сотрудника уже есть, а значит, дополнительных расходов не потребуется. Сколько денежных средств в месяц будет получать программист после уплаты отчислений и НДФЛ? Какой процент выделенного бюджета получит работник?

Решение. Пусть зарплата работника составляет x руб., в фонды за работника необходимо уплатить 30% зарплаты или $0{,}3x$ руб. Тогда $1{,}3x = 100\,000$, откуда $x \approx 76\,923$ рубля. После уплаты НДФЛ работник получит $0{,}87x$ или 66 923 руб. Тем самым, работник получит 66,9% бюджета, общий процент отчислений и налога равен 33,1%.

Задача 13. Физические лица, зарегистрированные в РФ в качестве индивидуальных предпринимателей, могут выбрать систему налогообложения, при которой налогом будут облагаться 6% их дохода. При этом им необходимо ежегодно уплачивать страховые взносы, размер которых в 2016 году составляет 23 153,33 коп. Отец с сыном, зарегистрированным в качестве индивидуального предпринимателя, принимают решение, как им оформить трудовые отношения: заключив трудовой договор (при этом выплачиваются отчисления в фонды и НДФЛ, см. задачу 12) или заключив договор с сыном как ИП. Помогите принять решение.

Решение. Договор в качестве ИП для сына целесообразен, если налог 6% и ежегодный фиксированный взнос 23 153,33 руб. будет меньше, чем НДФЛ 13%, то есть если 7% годового дохода больше 23 153,33. Тем самым, при зарплате больше 2000 руб. в месяц оптимально оформлять трудовой договор в качестве ИП.

Примечание. Заметим дополнительно, что в этом случае отец не будет должен производить отчисления в фонды. Тогда при перечислении сыну-предпринимателю суммы 100 тыс. руб. в месяц, как в предыдущей задаче, налог с нее составит 6 тыс. руб., а отчисления в фонды составляют $23153{,}33 : 12 \approx 1930$ руб. в месяц. При этом останется 92 070 руб., то есть дополнительная экономия составляет $92\,070 - 66\,923 = 25\,147$ руб. ежемесячно.

Этими задачами заканчивается основной материал занятия. Его закрепление можно проводить в форме соревнования. Учащиеся группами по четыре человека составляют 4 задачи для соседней группы, меняются составленными задачами, решают их и сообщают ответы той группе, которая составила задачи. За решение каждой задачи группа получает 1 балл, выигрывает группа, набравшая наибольшее количество баллов. Во время соревнования для проведения вычислений целесообразно пользоваться микрокалькулятором.

Подводя итоги занятия, учащиеся заполняют в тетради таблицу из двух столбцов: «Что нового я узнал и понял полностью» и «В чем необходимо потренироваться дополнительно». Учащиеся обсуждают между собой прошедшее занятие, выявляют каждый для себя новую полученную информацию, отвечают на вопросы друг друга.

Домашнее задание к занятию 1

1. Подготовить краткое сообщение на одну из тем, обсужденных на занятии, или на смежную тему. Например, «Потребительские индексы», «Зарплата», «Инфляция», «Налоги» и др.

2. На сайте РЕШУ ЕГЭ решить вариант http://reshuege.ru/test?id=9267343.

3. На сайте Московской олимпиады школьников по экономике решить задания дистанционного тура за 2015 год http://mosecon.olimpiada.ru/arch_tasks.

4. Придумать или подобрать из различных источников 5 задач экономического содержания по пройденному материалу. Обменяться задачами с товарищами и решить их.

5. Написать на каком-либо языке программирования программу для подсчета индекса реальной зарплаты по известной величине индекса номинальной зарплаты и индексу потребительских цен или программу для расчета налогов с зарплаты. Значения считать вводимыми с клавиатуры или считывать из текстового файла, если этот материал уже изучался на уроках информатики. Если программирование не изучалось, решить задачу в электронной таблице Excel или аналогичной.

Занятие 2: сложные проценты, вклады

Задание к занятию. Повторите понятие сложного процента — процента, начисляемого на процент. Проверьте свою готовность к занятию, решив задачи 1–9, выполните задание повышенной сложности 10.

1. Цена на товар составляла 1000 руб. Затем она повысилась на 10%, а затем еще на 10% от новой величины. Какой стала цена товара?

2. Цена холодильника в магазине ежегодно уменьшается на одно и то же число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый год уменьшалась цена холодильника, если выставленный на продажу за 20 000 рублей он через два года был продан за 15 842 рублей.

3. Цена на товар повысилась на 10%, а затем понизилась на 10% от новой величины. Сколько процентов начальной цены составляет конечная цена?

4. В понедельник акции компании подорожали на некоторое количество процентов, а во вторник подешевели на то же самое количество процентов. В результате они стали стоить на 4% дешевле, чем при открытии торгов в понедельник. На сколько процентов подорожали акции компании в понедельник?

5. В течение торговой сессии курс акций компании X повысился на 26%, а курс акций компании Y снизился на 10%, в результате чего эти два курса сравнялись. На сколько процентов курс акций Y был выше курса акций X до начала сессии?

6. До начала торговой сессии курс акций компании X был больше курса акций компании Y на 20%. В течение торговой сессии курс акций компании X понизился на 10%. На сколько процентов должен повыситься курс акций Y, чтобы эти два курса сравнялись?

Ответы: **1.** 1210. **2.** 11%. **3.** 99%. **4.** 20%. **5.** 40%. **6.** 8%.

7. Выведите общую формулу решения задачи 1 для случая n повышений цены на p%.

8. Выведите общую формулу решения задачи 2 для случае n понижений цены на p%.

9. Выведите общую формулу решения задачи 3 для n изменений цены на p_n%.

10. Прочтите текст письма Министерства финансов — ответ на вопрос банка о содержании понятия «процентный пункт».

Министерство финансов Российской Федерации

П и с ь м о

13.07.2009 № 03-04-06-01/164

Вопрос: Банк просит разъяснить следующее:

В изменениях, внесенных Федеральным законом от 22.07.2008 г. № 158-ФЗ в п. 27 ст. 217 НК РФ, использован термин «процентные пункты». Действующим законодательством понятие «процентные пункты» не определено. Правильно ли банк понимает, что если действующая ставка рефинансирования ЦБ РФ 10%, то ставка, увеличенная на пять процентных пунктов, будет равна 15%?

Ответ: Департамент налоговой и таможенно-тарифной политики рассмотрел письмо ОАО от 16.06.2009 № 1-01/1791 по вопросу налогообложения налогом на доходы физических лиц процентных доходов по вкладам в банке и в соответствии со статьей 34.2 Налогового кодекса Российской Федерации (далее — Кодекс) разъясняет следующее.

В соответствии с пунктом 27 статьи 217 Кодекса в редакции Федерального закона от 22.07.2008 № 158-ФЗ «О внесении изменений в главы 21, 23, 24, 25 и 26 части второй Налогового Кодекса Российской Федерации и некоторые другие акты законодательства Российской Федерации о налогах и сборах», вступившей в силу с 1 января 2009 года, не подлежат налогообложению доходы в виде процентов, получаемые налогоплательщиками по вкладам в банках, находящихся на территории Российской Федерации, если:

проценты по рублевым вкладам выплачиваются в пределах сумм, рассчитанных исходя из действующей ставки рефинансирования Банка России, увеличенной на пять процентных пунктов, в течение периода, за который начислены указанные проценты;

установленная ставка не превышает 9 процентов годовых по вкладам в иностранной валюте;

проценты по рублевым вкладам, которые на дату заключения договора либо продления договора были установлены в размере, не превышающем действующую ставку рефинансирования Банка России, увеличенную на пять процентных пунктов, при условии, что в течение периода начисления процентов размер процентов по вкладу не повышался и с момента, когда процентная ставка по рублевому вкладу превысила ставку рефинансирования Банка России, увеличенную на пять процентных пунктов, прошло не более трех лет.

Процентный пункт используется для обозначения изменений ставки процента. Так, например, в случае, если в течение периода, за который начислены проценты по вкладу в банке, ставка рефинансирования Банка России составляет 10 процентов годовых, увеличенная на пять процентных пунктов ставка составит 15 процентов годовых.

Заместитель директора Департамента
С. В. Разгулин

Проанализируйте структуру письма, подумайте о том, почему министерство финансов дает ответы на запросы именно в таком виде. Найдите в письме ответ на вопрос банка, сверьте полученную информацию с информацией из энциклопедического словаря. Почему банк направил запрос в министерство, а не использовал информацию из других источников? Выделите в тексте письма аббревиатуры и незнакомые понятия, найдите их значения в достоверных источниках. Прочтите упоминаемую в вопросе статью Налогового кодекса.

Ход занятия. Учащиеся рассказывают о выполнении домашнего задания. Особое внимание следует уделить работе с документом. Учителю необходимо постоянно работать над тем, чтобы научить учащихся выявлять незнакомые понятия и находить информацию о них. Готовясь к занятию, учащиеся должны были подготовить сообщения о значении терминов налоговая политика, таможенно-тарифная политика, ставка рефинансирования.

Кроме того, необходимо убедиться, что все учащиеся верно понимают, что проценты называют простыми, если они начисляются только на первоначальный капитал (один раз), и сложными, если они начисляются на наращенный капитал (несколько раз). Решение задач на вычисление сложных процентов основано на использовании следующих формул: величина S_0, увеличиваемая на p% в течение n периодов в конце n-го этапа становится равной

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n,$$

при этом

$$1+0,01p=\sqrt[n]{\frac{S_n}{S_0}}.$$

Эти формулы являются решениями задач 1 и 2 для подготовки к занятию. Укажем общую формулу, соответствующую заданию 3: при последовательном изменении величины S_0 на p_n% в течение n периодов, она становится равной

$$S_n = S_0\left(1+\frac{p_1}{100}\right)\left(1+\frac{p_2}{100}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{p_n}{100}\right),$$

где величины p_n могут быть как положительными при увеличении величины на p%, так и отрицательными при уменьшении величины на p%.

Эти соотношения являются основными для расчета сумм вкладов, проверить их понимание можно на примере следующей задачи.

Задание 1. Миша и Маша положили на депозит одинаковые суммы под 10% годовых. Через год сразу после начисления процентов Миша снял со своего счета 5000 рублей, а еще через год снова внес 5000 рублей. Маша, наоборот, через год доложила на свой счет 5000 рублей, а еще через год сразу после начисления процентов сняла со счета 5000 рублей. Кто через три года со времени первоначального вложения получит большую сумму и на сколько рублей?

Решение. Пусть для определенности Миша и Маша 15.01.12 положили в банк x рублей. Подготовим выписки из лицевых счетов Маши и Миши.

Выписка из лицевого счета Маши

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.)/ размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Принято от клиента	5000	$1{,}1x+5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x+5500$
15.01.14	Выдано клиенту	5000	$1{,}1^2x+500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x+550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x+550$	0

Выписка из лицевого счета Миши

Дата операции	Произведенная операция и на какую сумму		Остаток на счете клиента (руб.)
	Наименование операции	На какую сумму (руб.) / размер в %	
15.01.12	Принято от клиента	x	x
15.01.13	Начислено на остаток	10%	$1{,}1x$
15.01.13	Выдано клиенту	5000	$1{,}1x-5000$
15.01.14	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^2x-5500$
15.01.14	Принято от клиента	5000	$1{,}1^2x-500$
15.01.15	Начислено на остаток	10%	$1{,}1^3x-550$
15.01.15	Выдано клиенту	$1{,}1^3x-550$	0

Итак, Маша получила на 1100 руб. больше, чем Миша.

Вернемся теперь к содержанию понятия процентный пункт. Различие между понятиями «процент» и «процентный пункт» подчеркнем на примере следующей задачи.

Задание 2. Доходность портфеля акций выросла с 10% до 14% годовых. Как изменилась доходность: а) в процентах, б) в процентных пунктах?

Решение: а) на 40%, б) на 4 процентных пункта.

Задание 3. Банк предлагает клиентам открыть два депозита сроком на 1 год: обычный и с капитализацией. Депозит «Добро» под 12% годовых, проценты начисляются в конце срока вклада. Депозит «Счастье» под 11% годовых, проценты по вкладу капитализируются (причисляются к сумме вклада) каждые три месяца. Какой из этих депозитов выгоднее?

Решение. На депозит «Счастье» будет четырежды начислены проценты, каждый раз из расчета 3% за квартал. По формуле сложных процентов доход составит $1{,}03^4 \approx 1{,}1255$ или примерно 12,55% от начальной суммы. Тем самым, депозит «Счастье» выгоднее депозита «Добро» на 0,55 процентного пункта.

Задание 4. Банк под определенный процент принял некоторую сумму. Через год четверть накопленной суммы была снята со счета. Банк увеличил процент годовых на 40 процентных пунктов. К концу следующего года накопленная сумма в 1,44 раза превысила первоначальный вклад. Каков новый процент годовых?

Решение. Пусть банк первоначально принял вклад в размере S под x% годовых. Тогда к началу второго года сумма стала $S(1+0{,}01x)$.

После снятия четверти накопленной суммы на счете осталось $\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)$. С момента увеличения банком процентной ставки на 40% к концу второго года хранения остатка вклада накопленная сумма стала

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01),$$

Причем по условию задачи эта сумма равна $1{,}44S$. Тогда:

$$\frac{3S}{4}(1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}44S \Leftrightarrow (1+0{,}01x)\cdot(1+(x+40)\cdot 0{,}01)=1{,}92 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (100+x)\cdot(100+(x+40))=19\,200 \Leftrightarrow (100+x)\cdot(140+x)=19\,200 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x=-120\pm\sqrt{19\,600} \Leftrightarrow x=-120\pm 140 \underset{x>0}{\Leftrightarrow} x=20.$$

После повышения на 40 процентных пунктов ставка достигла $20\%+40\%=60\%$.

При решении задания 4–6 понадобятся формулы n-го члена и суммы n первых членов геометрической прогрессии. Рекомендуем напомнить их учащимся и предложить им решить задачи, работая в парах.

Задание 5. Бизнесмен Бубликов получил в 2000 году прибыль в размере 5000 рублей. Каждый следующий год его прибыль увеличивалась на 300% по сравнению с предыдущим годом. Сколько рублей заработал Бубликов за 2003 год?

Решение. Поскольку каждый год прибыль увеличивалась на 300%, она увеличивалась в 4 раза по сравнению с предыдущим годом. Ищем четвертый член геометрической прогрессии: за 2003 год Бубликов заработал $5000\cdot 4^3=320\,000$ руб.

Задание 6. Компания «Альфа» начала инвестировать средства в перспективную отрасль в 2001 году, имея капитал в размере 5000 долларов. Каждый год, начиная с 2002 года, она получала прибыль, которая составляла 200% от капитала предыдущего года. А компания «Бета» начала инвестировать средства в другую отрасль в 2003 году, имея капитал в размере 10000 долларов, и, начиная с 2004 года, ежегодно получала прибыль, составляющую 400% от капитала предыдущего года. На сколько долларов капитал одной из компаний был больше капитала другой к концу 2006 года, если прибыль из оборота не изымалась?

Решение. Каждый год прибыль компании «Альфа» составляла 200% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 300% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Альфа» была сумма

$$5000\cdot 3^{2006-2001}=5000\cdot 3^5=1\,215\,000 \text{ долларов.}$$

Каждый год прибыль компании «Бета» составила 400% от капитала предыдущего года, значит, капитал каждый год составлял 500% от капитала предыдущего года. В конце 2006 года на счете компании «Бета» была сумма

$$10\,000\cdot 5^{2006-2003}=10\,000\cdot 5^3=1\,250\,000 \text{ долларов.}$$

Таким образом, капитал компании «Бета» был на 35 000 долларов больше.

Задание 7. Гражданин Петров по случаю рождения сына открыл 1 сентября 2008 года в банке счет, на который он ежегодно кладет 1000 рублей. По условиям вклада банк ежегодно начисляет 20% на сумму, находящуюся на счете. Через 6 лет у гражданина Петрова родилась дочь, и 1 сентября 2014 года он открыл в другом банке счет, на который ежегодно кладет по 2200 рублей, а банк начисляет 44% в год. В каком году после очередного пополнения суммы вкладов сравняются, если деньги со счетов не снимают?

Решение. Через n лет 1 сентября на первом счете будет сумма

$$1000+1000\cdot 1,2+...+1000\cdot 1,2^n=1000(1+1,2+...+1,2^n)=1000\cdot\frac{1,2^{n+1}-1}{1,2-1}=5000(1,2^{n+1}-1)\text{ (руб.).}$$

В это же время на втором счете будет сумма

$$2200+2200\cdot 1,44+...+2200\cdot 1,44^{n-6}=2200\cdot\frac{1,44^{n-5}-1}{1,44-1}5000(1,44^{n-5}-1)\text{ (руб.).}$$

Приравняем эти суммы и решим полученное уравнение:

$$5000(1,2^{n+1}-1)=5000(1,44^{n-5}-1)\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,44^{n-5}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 1,2^{n+1}=1,2^{2(n-5)}\Leftrightarrow n+1=2n-10\Leftrightarrow n=11.$$

Таким образом, суммы на счетах сравняются через 11 лет после открытия первого вклада то есть в 2019 году.

Этими задачами заканчивается основной материал занятия. Его закрепление можно проводить в форме соревнования. Учащиеся группами по четыре человека составляют 4 задачи для соседней группы, меняются составленными задачами, решают их и сообщают ответы той группе, которая составила задачи. За решение каждой задачи группа получает 1 балл, выигрывает группа, набравшая наибольшее количество баллов. Во время соревнования для проведения вычислений целесообразно пользоваться микрокалькулятором.

Подводя итоги занятия, учащиеся заполняют в тетради таблицу из двух столбцов: «Что нового я узнал и понял полностью» и «В чем необходимо потренироваться дополнительно». Учащиеся обсуждают между собой прошедшее занятие, выявляют каждый для себя новую полученную информацию, отвечают на вопросы друг друга.

Домашнее задание к занятию

1. Подготовить краткое сообщение на одну из тем, обсужденных на занятии, или на смежную тему. Например, «Ставка рефинансирования», «Депозиты», «Портфель акций» и др.
2. На сайте РЕШУ ЕГЭ решить вариант http://reshuege.ru/test?id=9267346.
3. На сайте Московской олимпиады школьников по экономике решить задания 1 дня очного тура за 2015 год http://mosecon.olimpiada.ru/arch_tasks.
4. Придумать или подобрать из различных источников 5 задач экономического содержания по пройденному материалу. Обменяться задачами с товарищами и решить их.
5. Написать на каком-либо языке программирования программу для подсчета сумм, находящихся на лицевом счете на 1 число каждого месяца, по известной величине начальной суммы и процентов, начисляемых по вкладу. Значения считать вводимыми с клавиатуры или считывать из текстового файла, если этот материал уже изучался на уроках информатики. Если программирование не изучалось, решить задачу в электронной таблице Excel или аналогичной.

Занятие 3: кредиты

Задание к занятию. Повторите понятия доли и процента, вспомните, как находить процент от числа и число по его проценту. Проверьте свою готовность к занятию, решив задачи 1–9, выполните задание 10.

1. Платежи по кредиту не должны превышать 40% доходов. Каков максимальный платеж по кредиту при доходах 10 000 руб. в месяц?

2. Под какой максимальный процент в месяц выгодно брать кредит при инфляции 24% в год?

3. Покупатель приобрел фотоаппарат за 10 тыс. руб. в кредит на 1 год под 20% годовых. Стоимость фотоаппарата через год составила 13 тыс. руб. Был ли выгоден кредит?

4. Кредит на сумму 10 000 руб. выдан на год под 36% годовых с единовременным погашением с процентами в конце срока. Какова будет переплата?

5. Кредит на сумму 10 000 руб. выдан на полгода под 36% годовых с единовременным погашением с процентами в конце срока. Какова будет переплата?

6. Кредит на сумму 10 000 руб. выдан на год под 1% в день с единовременным погашением с процентами в конце срока. Сколько рублей нужно будет уплатить в конце года?

7. Кредит на сумму 10 000 руб. выдан на два года под 6% в месяц с единовременным погашением с процентами в конце срока. Сколько рублей нужно будет уплатить за два года?

8. Кредит на сумму 10 000 руб. взят на три месяца с единовременным погашением с процентами в конце срока. Ставка кредита за первый месяц определяется из расчета 12% годовых, в каждый из следующих месяцев на 1 процентный пункт годовых больше. Сколько рублей будет уплачено в конце срока?

9. Кредит на сумму 10 000 руб. взят на три месяца с единовременным погашением с процентами в конце срока. В конце срока за банку было уплачено 10 330 руб. Какому проценту годовых с единовременным погашением с процентами в конце срока это соответствует?

Ответы:	**1.** 4000.	**2.** 2%.	**3.** да.	**4.** 3600.	**5.** 1800.
	6. 46 500.	**7.** 24 400.	**8.** 10 325.	**9.** 13,2%.	

10. Прочитайте текст о двух схемах погашения кредитов.

Выбирая кредитную программу, потенциальные заемщики ориентируются на процентную ставку по кредиту. Однако на сумму выплачиваемых процентов влияет не только ставка, но и метод погашения кредита. Таких методов существует два: дифференцированные платежи и аннуитетные платежи.

Дифференцированные платежи характерны тем, что задолженность по кредиту погашается равномерно начиная с самых первых выплат, а проценты начисляются на фактический остаток. Таким образом, каждый последующий платеж меньше предыдущего.

Аннуитет — начисление равных платежей на весь срок погашения кредита. При этом в первой половине срока погашения задолженность по кредиту практически не гасится — выплачиваются в большей части проценты. Эта особенность делает платежи относительно небольшими, но увеличивает общую сумму начисляемых процентов.

Чтобы наглядно показать разницу в погашении кредита при разных методах начисления платежей, приведем графики погашения кредита в размере 1 000 000 руб., взятого на 20 лет при 12% годовых (серым выделена выплата процентов по кредиту, синим — выплата тела кредита).

График погашения кредита дифференцированными платежами

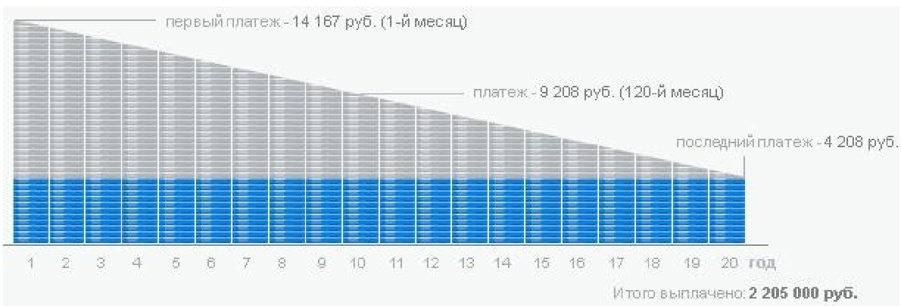
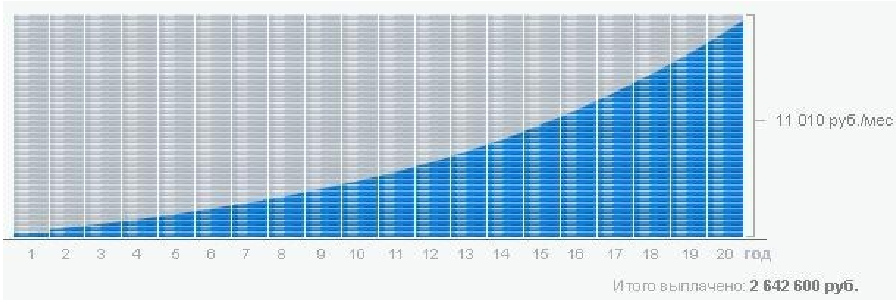


График погашения кредита аннуитетными платежами



Выделите в тексте незнакомые понятия, найдите их значения в достоверных источниках. Если у вас возникнут вопросы — запишите их. Используя приведенные графики, обоснуйте следующее утверждение.

Дифференцированные платежи дают линейную зависимость от погашения кредита: чем меньше должен — тем меньше начислили процентов. Сумма и срок досрочного погашения ничем не ограничены. Досрочное погашение в аннуитетной схеме лишь сокращает срок выплаты кредита: на графике «срезаются» последние платежи и отпадает необходимость платить соответствующие им проценты, которые в конце графика как раз очень малы. Таким образом, в аннуитетной схеме досрочное погашение невыгодно.

Ход занятия. Учащиеся рассказывают о выполнении домашнего задания. Особое внимание следует уделить работе с документом и с приведенными графиками. В течение урока учащимися под руководством учителя будут получены математические формулы, обосновывающие вид графиков и утверждения, анализ которых был задан на дом. Перед тем как приводить алгебраические выкладки в общем виде, целесообразно демонстрировать учащимся возможность анализировать экономическую задачу поэтапно, заполняя таблицы ежемесячных платежей. Такие таблицы получают заемщики, заключая договор с банком.

Рассмотрим задания 1 и 2 об аннуитетных платежах, задания 3 и 4 о дифференцированных платежах и сравним эти схемы выплат в задании 5.

Задание 1. 31 декабря 2014 года бизнесмен взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем бизнесмен переводит в банк определенную сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы бизнесмен выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Решение. Пусть x — один из трех разовых платежей. Тогда сумма долга после оплаты в первом году составит: $9\,930\,000\cdot 1{,}1-x$. После внесения второго платежа сумма долга станет равной $(9\,930\,000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x$. Долг после третьего платежа: $((9\,930\,000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x$. Третьим платежом бизнесмен должен погасить долг, то есть долг станет равным нулю, откуда получаем уравнение:

$$((9\,930\,000\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x)\cdot 1{,}1-x=0 \Leftrightarrow 9\,930\,000\cdot 1{,}1^3-1{,}1(1{,}1x+x)-x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9\,930\,000\cdot 1{,}1^3-3{,}31x=0 \Leftrightarrow x=\frac{9\,930\,000\cdot 1{,}1^3}{3{,}31}=3\,993\,000 \text{ (рублей).}$$

Решим задачу в более общем виде. Пусть сумма кредита равна S_0, ежегодный платеж равен x рублей, а годовые составляют q%. Тогда 31 декабря каждого года оставшаяся сумма долга умножается на коэффициент $m = 1 + 0{,}01q$. После первой выплаты сумма долга составит: $S_1 = S_0m - x$. После второй выплаты сумма долга составит:

$$S_2=S_1m-x=(S_0m-x)m-x=S_0m^2-mx-x=S_0m^2-(1+m)x.$$

После третьей выплаты сумма оставшегося долга:

$$S_3 = S_0 m^3 - (1 + m + m^2)x = S_0 m^3 - \frac{m^3 - 1}{m - 1} \cdot x.$$

По условию тремя выплатами необходимо погасить кредит полностью, тогда $S_3 = 0$, поэтому $S_0 m^3 = \frac{m^3 - 1}{m - 1}x$, откуда $x = \frac{S_0 m^3 (m-1)}{m^3 - 1}$. Подставляя S_0 = 9 930 000 и q = 10%, получаем: m = 1,1 и $x = \frac{9\,930\,000 \cdot 1{,}331 \cdot 0{,}1}{0{,}331} = 3\,993\,000$ руб.

Теорема об аннуитетных платежах. Обобщая вышеприведенные рассуждения на случай n платежных периодов (дней, месяцев, лет), получим общие формулы, связывающие сумму кредита S_0, коэффициент $m = 1 + 0{,}01q$, где q% — процентная ставка за период, величину текущего долга S_n и постоянную выплату x: $S_n = m^n S_0 - (1 + m + \ldots + m^{n-1})x$, и тогда

$$S_n = m^n S_0 - \frac{m^n - 1}{m - 1}x, \qquad x = \frac{m^n (m-1)}{m^n - 1} S_0, \qquad S_0 = \frac{m^n - 1}{m^{n+1} - m^n}x, \qquad n = 1 + \log_m \frac{(2-m)x}{x - S_0(m-1)}.$$

Задание 2. 1 января 2015 года бизнесмен взял в банке 1,1 млн рублей в кредит. Схема выплаты кредита следующая: 1 числа каждого следующего месяца банк начисляет 2 процента на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 2%), затем бизнесмен переводит в банк платеж. На какое минимальное количество месяцев бизнесмен может взять кредит, чтобы ежемесячные выплаты были не более 220 тыс. рублей?

Решение. Ясно, что чем больше месячные выплаты, тем быстрее будет выплачен долг. Значит, срок кредита будет минимален в том случае, когда выплаты составляют 220 тыс. рублей. Составим таблицу, в первом столбце которой будем указывать долг на первое число месяца, а во втором — долг в том же месяце, но уже после выплаты. Для упрощения расчетов будем сохранять только два знака после запятой, представляя суммы долга в тыс. рублей.

Месяц	**Долг на первое число месяца (тыс. руб)**	**Долг после выплаты (тыс. руб)**
1	1122	902
2	920,04	700,04
3	714,04	494,04
4	503,92	283,92
5	289,60	69,60
6	70,99	0

Заметим, что в последний месяц выплата составит менее 220 тыс. руб. Из таблицы видно, что минимальный срок кредита в условиях задачи составляет 6 месяцев.

Решим задачу иначе. Если бы банк не брал процентов, кредит можно было бы вернуть за 5 месяцев. За эти 5 месяцев проценты по кредитам не превысят 0,05 исходной суммы или 55 тысяч рублей. Таким образом, за шестой месяц можно выплатить банку проценты за пользование кредитом, и эта сумма не превысит 220 тыс. руб.

Применим общие формулы. При решении задачи 1 были получены формулы, связывающие данные в условии величины. Заметим, что в нашей задаче после предпоследней выплаты величина S_{n-1} может быть не только равной ежемесячной выплате x, но и оказаться меньше нее: $S_{n-1} \le x$: и в том, и в другом случае кредит будет погашен последним платежом.

Поэтому верно неравенство

$$m^{n-1} \geq \frac{2-m}{x-S_0(m-1)}x.$$

Подставляя данные из условия, получаем показательное относительно n неравенство:

$$1,02^{n-1} \geq \frac{0,98}{220-1100\cdot 0,02}\cdot 220 = \frac{215,6}{198} = 1,088...$$

Требуется найти наименьшее натуральное число n, удовлетворяющее неравенству, это можно сделать перебором. Другой путь — свести показательное неравенство к логарифмическому: $n \geq 1+\log_{1.02} 1,088... > 5,2$, откуда $n = 6$.

Задание 3. Бизнесмен взял кредит в банке на срок 9 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на 12%, а затем уменьшается на сумму, уплаченную бизнесменом. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Сколько процентов от суммы кредита составила сумма, уплаченная банку сверх кредита?

Решение. Общая сумма, уплаченная банку сверх кредита, обусловлена только применением процентной ставки. В первом месяце эта часть заплаченной суммы составляла $0,12S_0$, далее она равномерно уменьшалась, составляя во втором месяце $0,12\cdot\frac{8}{9}S_0$, в третьем — $0,12\cdot\frac{7}{9}S_0$, …, в последнем — $0,12\cdot\frac{1}{9}S_0$. Всего за 9 месяцев:

$$0,12S_0\cdot\left(1+\frac{8}{9}+\frac{7}{9}+...+\frac{1}{9}\right) = 0,12S_0\cdot\frac{1+\frac{1}{9}}{2}\cdot 9 = 0,12S_0\cdot\frac{9+1}{2} = 0,6S_0.$$

Тем самым, сверх кредита бизнесмен выплатил 60% суммы кредита.

Задание 4 (ЕГЭ–2015)**.** 15-го января планируется взять кредит в банке на 19 месяцев. Условия его возврата таковы: 1-го числа каждого месяца долг возрастет на q% по сравнению с концом предыдущего месяца; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 30% больше суммы, взятой в кредит. Найдите q.

Решение. Рассуждаем аналогично. Пусть начальная сумма кредита равна S_0, тогда выплата за первый месяц равна $\frac{q}{100}S_0$. По условию долг перед банком должен уменьшаться равномерно:

$$\frac{q}{100}S_0,\ \frac{18}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0,\ ...,\ \frac{2}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0,\ \frac{1}{19}\cdot\frac{q}{100}S_0.$$

Величина переплаты равна

$$\frac{q}{100}S_0\left(1+\frac{18}{19}+...+\frac{2}{19}+\frac{1}{19}\right) = \frac{q}{10}S_0.$$

По условию общая сумма выплат на 30% больше суммы, взятой в кредит, тогда:

$$0,1qS_0 = 0,3S_0 \Leftrightarrow q = 3.$$

Теорема о дифференцированных платежах. Повторив решение предыдущей задачи для n месяцев, получим общие формулы для дифференцированных платежей. Пусть на n платежных периодов (дней, месяцев, лет) в кредит взята сумма S_0, причем каждый платежный период долг сначала возрастет на q% по сравнению с концом предыдущего платежного периода, а затем вносится оплата так, что долг становится на одну и ту же сумму меньше долга на конец предыдущего платежного периода. Тогда величина переплаты П и полная величина выплат В за все время выплаты кредита даются формулами

$$\text{П} = \frac{q}{100} \cdot \frac{n+1}{2} S_0, \qquad \text{В} = S_0 + \text{П} = S_0 \left(1 + \frac{q(n+1)}{200}\right).$$

В условиях задачи 4 получаем: $\dfrac{q(n+1)}{200} S_0 = 0{,}3 S_0$, откуда для $n = 19$ находим $q = 3$.

Задание 5. Бизнесмен хочет взять в кредит 331 000 рублей на 3 месяца под 10% в месяц. Сравните выплаты по схеме аннуитетных и дифференцированных платежей.

Решение. Пусть x руб. — сумма ежемесячных выплат при аннуитете. Полная сумма выплат равна $3x$, где $x = \dfrac{m^n (m-1)}{m^n - 1} S_0$. Тогда $3 \cdot \dfrac{1{,}1^3 (1{,}1-1)}{1{,}1^3 - 1} \cdot 331\,000 = 399\,300$ руб. — сумма выплат, 68 300 руб. — переплата. Для дифференцированных платежей $\text{П} = \dfrac{q}{100} \cdot \dfrac{n+1}{2} S_0 = 66\,200$ руб. Разность переплат составляет 2100 руб. или примерно 0,6% суммы кредита.

Примечание. Полезно решить эту задачу, заполнив таблицы ежемесячных выплат.

Подводя итоги этого занятия, следует предложить учащимся обсудить в группах и предложить ответы на вопрос: какую из двух схем погашения кредита следует предпочесть для долгосрочной ипотеки и почему? Учащиеся должны подкрепить расчетами, что схема с дифференцированными платежами хоть и более выгодна, но обычно недоступна заемщикам из-за слишком больших первоначальный платежей (в условиях последней задачи 143,4 против 133,1 тыс. руб.). И эта разница тем заметнее, чем на большее количество платежных периодов выдается кредит. Кроме того, полезно заметить, что переплата при аннуитетных платежах, выданных на большой срок, может нивелироваться инфляцией и ростом доходов заемщика (см. задачу 3 из задания для подготовки к занятию).

Домашнее задание к занятию 3

1. Подготовить краткое сообщение на одну из тем, обсужденных на занятии, или на смежную тему. Например, «Функции кредита», «Виды кредита», «Виды аннуитетов» и др.
2. На сайте РЕШУ ЕГЭ решить вариант http://reshuege.ru/test?id=9267348.
3. На сайте Московской олимпиады школьников по экономике решить задания второго дня очного тура за 2015 год http://mosecon.olimpiada.ru/arch_tasks.
4. Придумать или подобрать из различных источников 5 задач экономического содержания по пройденному материалу. Обменяться задачами с товарищами и решить их.
5. Написать на каком-либо языке программирования программу «Кредитный калькулятор» для расчета платежей по кредиту по величине начальной суммы, процентной ставке и количеству платежных периодов. Значения считать вводимыми с клавиатуры или считывать из текстового файла. Если программирование не изучалось, решить задачу в электронной таблице Excel или аналогичной.

Занятие 4: оптимальный выбор

Задание к занятию. Повторите, как находить наибольшее и наименьшее на отрезке значения линейной и квадратичной функций. Проверьте свою готовность к занятию, решив задачи 1–9, выполните задание 10.

1. Что выгоднее: положить 10 000 на год под 12% годовых или положить 12 000 на год под 10% годовых?

2. Известно, что q не меньше 12 и не больше 15. Найдите наибольшее значение $2q-3$.

3. Известно, что q не меньше 12 и не больше 15. Найдите наибольшее значение $2-3q$.

4. Известно, что q не меньше −12 и не больше 5. Найдите наибольшее значение $2q^2-3$.

5. Известно, что q не меньше −12 и не больше 5. Найдите наименьшее значение $2q^2-3$.

6. Что выгоднее: положить 10 000 на год под 12% годовых или получать за них по 150 рублей в месяц?

7. Что выгоднее: положить 10 000 на два года под 12% годовых или получать за них по 150 рублей в месяц?

8. Расстояние между двумя шахтами A и B 60 км. На шахте A добывается 200 т руды в сутки, на шахте B — 100 т руды в сутки. Где нужно построить завод по переработке руды, чтобы для её перевозки количество тонно-километров было наименьшим? Тот же вопрос, если на шахтах добывают одинаковое количество руды.

Ответы:	**1.** одинаково.	**2.** 27.	**3.** −34.	**4.** 285
	5. −3.	**6.** второе.	**7.** первое.	**8.** на шахте A; в любом месте.

9. Анализируя задание 8, выскажите гипотезу, подтвердите ее расчетами.

10. Прочитайте текст из учебника по экономической теории.

Многие задачи, с которыми приходится иметь дело в повседневной практике, являются многовариантными. Среди множества возможных вариантов в условиях рыночных отношений приходится отыскивать в некоторых отношениях наилучшие при ограничениях, налагаемых на природные, экономические и технологические возможности: при разработке производственной программы предприятия, распределении ее по исполнителям, при размещении заказов между исполнителями и по временным интервалам, при определении наилучшего ассортимента выпускаемой продукции, в задачах перспективного, текущего и оперативного планирования и управления; при планировании грузопотоков, определении плана товарооборота и его распределении; в задачах развития и размещения производительных сил, баз и складов систем обращения материальных ресурсов и т. д. В связи с этим возникла необходимость применять для анализа и синтеза экономических ситуаций математические методы и современную вычислительную технику. Такие методы объединяются под общим названием «математическое программирование». Особенно широкое применение методы оптимизации получили при решении задач экономии ресурсов (выбор ресурсосберегающих технологий, составление смесей, раскрой материалов), производственно-транспортных и других задач.

Математическое программирование — область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных.

Функцию, экстремальное значение которой нужно найти в условиях экономических возможностей, называют целевой, показателем эффективности или критерием оптимальности. Экономические возможности формализуются в виде системы ограничений. Все это составляет математическую модель. Математическая модель задачи — это отражение исходной экономической ситуации в виде функций, уравнений, неравенств, цифр и т. д. Модель задачи математического программирования включает:

– совокупность неизвестных величин, действуя на которые систему можно совершенствовать. Их называют планом задачи (вектором управления, решением, управлением, стратегией, поведением и др.);

– целевую функцию (функцию цели, показатель эффективности, критерий оптимальности, функционал задачи и др.).

Целевая функция позволяет выбирать наилучший вариант из множества возможных. Наилучший вариант доставляет целевой функции экстремальное (наибольшее или наименьшее) значение. Это может быть прибыль, объем выпуска или реализации, затраты производства, издержки обращения, уровень обслуживания или дефицитности, число комплектов, отходы и т. д.

Эти условия следуют из ограниченности ресурсов, которыми располагает общество в любой момент времени, из необходимости удовлетворения насущных потребностей, из условий производственных и технологических процессов. Ограниченными являются не только материальные, финансовые и трудовые ресурсы. Таковыми могут быть возможности технического, технологического и вообще научного потенциала. Нередко потребности превышают возможности их удовлетворения. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Их совокупность образует область допустимых решений (область экономических возможностей). План, удовлетворяющий системе ограничений задачи, называется допустимым. Допустимый план, доставляющий функции цели экстремальное значение, называется оптимальным. Оптимальное решение, вообще говоря, не обязательно единственно. Возможны случаи, когда оно не существует, имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

Выделите в тексте незнакомые понятия, найдите их значения в достоверных источниках. Если у вас возникнут вопросы — запишите их. Найдите информацию о задаче Дидоны. Найдите информацию о других известных экстремальных задачах.

Задание 1. Алексей приобрёл ценную бумагу за 7 тыс. рублей. Цена бумаги каждый год возрастает на 2 тыс. рублей. В любой момент Алексей может продать бумагу и положить вырученные деньги на банковский счёт. Каждый год сумма на счёте будет увеличиваться на 10%. В течение какого года после покупки Алексей должен продать ценную бумагу, чтобы через тридцать лет после покупки этой бумаги сумма на банковском счёте была наибольшей?

Решение. Если Алексей продаст бумагу в течение k-го года, то через тридцать лет после покупки сумма на его счёте будет равна $(2k+5)\cdot 1{,}1^{20-k}$. Таким образом, нам нужно найти номер максимального члена последовательности $a_k=(2k+5)\cdot(1{,}1)^{30-k}$, где k пробегает целые значения от 1 до 30. Рассмотрим приращение

$$b_k = a_k - a_{k-1} = (1{,}1)^{30-k}(2k+5-1{,}1\cdot(2(k-1)+5)) = (1{,}1)^{30-k}(1{,}7-0{,}2k).$$

Отсюда $b_k>0$ при $k\le 8$ и $b_k<0$ при $k>8.$ Следовательно, наибольшее значение последовательность a_k принимает при $k=8.$ Продать бумагу следует в течение восьмого года.

Приведем другое решение. Продать ценную бумагу нужно в том момент, когда 10% от стоимости станут составлять не меньше чем 2 тыс. рублей, что возможно при стоимости бумаги не менее 20 тыс. рублей.

Это произойдет через семь лет после покупки ценной бумаги $(7+7\cdot 2=21)$. Таким образом, ценную бумагу нужно продать в течение восьмого года (сразу по прошествии семи лет)

Задание 2. Производство x тыс. единиц продукции обходится в $q = 0{,}5x^2 + x + 7$ млн рублей в год. При цене p тыс. рублей за единицу годовая прибыль от продажи этой продукции (в млн рублей) составляет $px - q$. При каком наименьшем значении p через три года суммарная прибыль составит не менее 75 млн рублей?

Решение. Прибыль (в млн рублей) за один год выражается величиной

$$px-(0{,}5x^2+x+7) = -0{,}5x^2+(p-1)x-7.$$

Это выражение является квадратным трёхчленом, оно достигает своего наибольшего значения $\dfrac{(p-1)^2}{2}-7$ при $x=p-1.$ Прибыль составит не менее 75 млн рублей, если

$$\frac{(p-1)^2}{2}-7\ge\frac{75}{3}\Leftrightarrow (p-1)^2\ge 64\Leftrightarrow (p-9)(p+7)\ge 0\,,$$

то есть при $p \ge 9,$ поскольку цена продукции не может быть отрицательной. Таким образом, искомая наименьшая цена составляет 9 тыс. руб.

Примечание. Вместо исследования квадратного трехчлена можно, выразить p из неравенства $px-(0,5x^2+x+7)\ge 25$ и использовать неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$p \ge \frac{x}{2}+\frac{32}{x}+1 \ge 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{32}{x}}+1=9.$$

Задание 3. В распоряжении начальника имеется бригада рабочих в составе 24 человек. Их нужно распределить на день на два объекта. Если на первом объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет $4t^2$ у. е. Если на втором объекте работает t человек, то их суточная зарплата составляет t^2 у. е. Как нужно распределить на эти объекты бригаду рабочих, чтобы выплаты на их суточную зарплату оказались наименьшими? Сколько у. е. в этом случае придется заплатить рабочим?

Решение. Пусть на первый объект будет направлено x рабочих, суточная зарплата которых составит $4x^2$ у. е. Тогда на второй объект будет направлено $(24-x)$ рабочих, их суточная заработная плата $(24-x)^2=(576-48x+x^2)$ (у. е.). В день начальник будет должен платить рабочим $(5x^2-48x+576)$ у. е.

Рассмотрим функцию $f(x)=5x^2-48x+576,$ причем $0<x<24,\ x\in\mathbb{N}$ Функция квадратичная, старший коэффициент положителен, следовательно, она имеет наименьшее значение при $x_0=4{,}8.$ Заметим, что точка минимума не является натуральным числом, поэтому исследуемая функция достигает наименьшего значения в точке 4 или в точке 5. Найдем и сравним эти значения:

$$f(4)=5\cdot16-48\cdot4+576=16(5-12+36)=16\cdot29=16\cdot30-16=464,$$
$$f(5)=125-240+576=461.$$

Тем самым, на множестве натуральных значений аргумента наименьшее значение функции достигается в точке 5. Поэтому необходимо направить 5 рабочих на первый объект, 19 рабочих — на второй объект. Зарплата рабочих составит 461 у. е.

Задание 4 (Пробный ЕГЭ–2016, Санкт-Петербург)**.** Вася мечтает о собственной квартире, которая стоит 3 млн руб. Он может купить ее в кредит, при этом банк готов выдать эту сумму сразу, а погашать кредит придется 20 лет равными ежемесячными платежами, при этом придется выплатить сумму, на 180% превышающую исходную. Вместо этого Вася может снимать квартиру (стоимость аренды — 15 тыс. руб. в месяц), откладывая каждый месяц после уплаты арендной платы сумму, которая останется от его возможного платежа банку по первой схеме. За какое время в этом случае Вася сможет накопить на квартиру, если считать, что стоимость ее не изменится?

Решение. Сумма, которую необходимо будет выплатить банку при покупке квартиры в кредит, на 180% превышает исходные 3 млн руб., поэтому она равна $3\cdot2{,}8=8{,}4$ млн руб. Кредит должен быть погашен за 20 лет то есть за 240 одинаковых ежемесячных платежей. Поэтому величина ежемесячного платежа равна 35 тыс. руб.

Если Вася будет снимать квартиру, то после оплаты аренды у него будет оставаться ежемесячно 20 тыс. руб., чтобы их накопить 3 млн понадобится 150 месяцев или 12,5 лет.

Задание 5 (Задания ФИПИ для подготовки к ЕГЭ–2016)**.** Предприниматель купил здание и собирается открыть в нём отель. В отеле могут быть стандартные номера площадью 27 квадратных метров и номера «люкс» площадью 45 квадратных метров. Общая площадь, которую можно отвести под номера, составляет 981 квадратный метр. Предприниматель может поделить эту площадь между номерами различных типов, как хочет. Обычный номер будет приносить отелю 2000 рублей в сутки, а номер «люкс» — 4000 рублей в сутки. Какую наибольшую сумму денег сможет заработать в сутки на своём отеле предприниматель?

Решение. Пусть в отеле будет x номеров площадью 27 кв. м и y номеров площадью 45 кв. м. Тогда $27x+45y\le 981$ или $3x+5y\le 109$ (*). Прибыль, которую будут приносить эти номера, равна $2000x+4000y$ или $2000(x+2y)$.

Прибыль будет наибольшей при наибольшем значении суммы $x+2y$. Пусть $s=x+2y$, тогда $x=s-2y$, откуда, подставляя в (*), получаем:

$$3(s-2y)+5y\le 109 \Leftrightarrow 3s\le y+109.$$

В случае равенства $3s=y+109$ наибольшему значению суммы s соответствовало бы наибольшее значение величины y. В случае неравенства необходимо найти наибольшее возможное значение y и проверить меньшие значения, уменьшающие количество пустого пространства.

Наибольшее возможное значение y равно 21. Поскольку $981=45\cdot 21+36$, в гостинице можно открыть 21 номер люкс и 1 стандартный номер, которые будут приносить предпринимателю доход $2000(1+2\cdot 21)=86\ 000$ руб. в сутки. При этом останется 9 кв. м. незанятого пространства. Уменьшим на 1 количество люксов. Если в гостинице 40 люксов и 3 стандартных номера, незанятого пространства не остается: 981 = 27·3 + 45·20. В этом случае доход тот же 2000·3 + 4000·20 = 86 000 руб. Дальнейшее уменьшение количества люксов в пользу стандартных номеров приведет к уменьшению прибыли.

Ответ: 86 000 руб.

Примечание. Необходимость проверки варианта, уменьшающего незанятое номерами пространства, может ускользнуть от внимания решающего, что может привести к ошибочным выводам. Покажем это.

Пусть в условиях предыдущей задачи стоимость стандартного номера не 2000 руб., а 2200 руб. Повторяя рассуждения, придем к необходимости максимизировать сумму $2000(1{,}1x+2y)$ при том же условии $3x+5y\le 109$, откуда для $s=1{,}1x+2y$ получим неравенство $3(\frac{10}{11}s-\frac{20}{11}y)+5y\le 109 \Leftrightarrow 30s\le 5y+1199.$ Аналогично предыдущему, поиск оптимального варианта следует начать с рассмотрения случая наибольшего y, равного, как и ранее, 21. В этом случае остается 9 кв. м нераспределенной площади, а прибыль будет равна 4000·21 + 2200 = 86 200 руб. Уменьшая количество номеров люкс на 1, получим полностью распределенную площадь под 20 номеров люкс и 3 стандартных номера, что даст прибыль 4000·20 + 2200·3 = 86 600 руб. Это и есть наибольшая возможная прибыль.

Изменим задачу. Пусть теперь площадь всей гостиницы равна 980 кв. м., номера категории люкс приносят 4000 руб. в сутки, а стандартные номера — 2200 руб. в сутки. Если в гостинице 21 номер люкс и 1 стандартный номер, они будут приносить доход 86 200 руб. в сутки, при этом останется 8 кв. м. незанятого пространства. Если в гостинице будет 20 люксов и 2 стандартных номера, они будут приносить доход 84 400 руб. в сутки и останется 26 кв. м. незанятого пространства. Следующий вариант: 19 люксов, 4 стандартных номера и 17 кв. м нераспределенной площади соответствует доходу 84 800 руб. в сутки. Что делать дальше? До какого момента перебирать варианты?

Укажем общий критерий. Вначале поясним идею, проводя приближенные вычисления с точностью до одного знака после запятой. Доход с квадратного метра в номере люкс равен $\frac{4000}{45}=88{,}9...$ руб./ кв. м, а доход для стандартного номера равен $\frac{2200}{27}=81{,}5...$ руб./кв. м. Разница в доходе составляет 7,4 руб. на кв. м. Убирая один люксовый номер, предприниматель теряет $45\cdot 7{,}4=330$ руб. дохода, а 8 кв. м нераспределенной площади могут принести примерно $8\cdot 81{,}5=652$ руб., если станут частью стандартного номера. Перебор по уменьшению количества люксовых номеров необходимо осуществлять до тех пор, пока потери от преобразования люксов в стандартные номера не превышают стоимость свободного пространства, в нашем случае — не более одного раза.

Обобщая эти рассуждения, получим оценку на количество убираемых люксовых номеров в общем виде:

$$n \le \frac{S_{св}\rho_{ст}}{S_л(\rho_л - \rho_{ст})},$$

где $S_{св}$ — площадь свободного пространства, $\rho_{ст}$ — удельный доход на кв. м стандартного номера, $\rho_л$ — удельный доход на кв. м люксового номера, $S_л$ — площадь люксового номера.

Примечание. Полученная оценка дает способ решения таких задач вовсе без составления уравнений и неравенств: следует получить наибольшее значение n и решить задачу перебором.

Задание 6 (Задания ФИПИ для подготовки к ЕГЭ–2016)**.** Садовод привез на рынок 91 кг яблок, которые после транспортировки разделил на три сорта. Яблоки первого сорта он продавал по 40 руб., второго сорта — по 30 руб., третьего сорта — по 20 руб. за килограмм. Выручка от продажи всех яблок составила 2170 руб. Известно, что масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта. Сколько килограммов яблок второго сорта продал садовод?

Решение. Пусть x кг — масса яблок 1-го сорта, y кг — масса яблок 2-го сорта, оставшиеся $91-(x+y)$ кг — масса яблок 3-го сорта. Для величины выручки имеем:

$$40x+30y+20\cdot(91-x-y)=2170 \Leftrightarrow 2x+y=35,$$

откуда $y=35-2x$ (*).

Поскольку масса яблок 1-го сорта меньше массы яблок 2-го сорта на столько же процентов, на сколько процентов масса яблок 2-го сорта меньше массы яблок 3-го сорта имеем:

$$\frac{x}{y}=\frac{y}{91-(x+y)}.$$

Подставим условие (*) в полученную пропорцию и решим ее:

$$\frac{x}{35-2x}=\frac{35-2x}{x+56} \underset{0<x<17,5}{\Leftrightarrow} x(x+56)=(35-2x)^2 \Leftrightarrow 3x^2-196x+1225=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=\dfrac{175}{3} \end{array}\right. \underset{x<17,5}{\Leftrightarrow} x=7.$$

Тем самым, садовод продал 7 кг яблок первого сорта и, следовательно, $35-14=21$ кг яблок второго сорта.

Ответ: 21 кг.

Задание 7 (Задания ФИПИ для подготовки к ЕГЭ–2016)**.** В двух шахтах добывают алюминий и никель. В первой шахте работают 20 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 1 кг алюминия или 2 кг никеля. Во второй шахте работают 100 шахтеров, каждый из которых трудится 5 часов в день. При этом один шахтер за час добывает 2 кг алюминия или 1 кг никеля.

Обе шахты поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 2 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом шахты договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой шахте x шахтеров, а во второй шахте y шахтеров заняты на добыче алюминия. Составим таблицу по данным задачи.

	Алюминий		Никель	
	Количество шахтеров, чел	**Количество металла за смену, кг**	**Количество шахтеров, чел**	**Количество металла за смену, кг**
Шахта 1	x	$5x$	$20-x$	$10(20-x)$
Шахта 2	y	$10y$	$100-y$	$5(100-y)$
Всего		$5x+10y$		$700-10x-5y$

Поскольку алюминия необходимо добывать вдвое больше никеля, имеем:

$$5x+10y=2(700-10x-5y)\Leftrightarrow 25x=1400-20y\Leftrightarrow 5x=280-4y.\ (*)$$

Пусть s — масса сплава, она втрое больше массы добытого никеля: $s=3(700-10x-5y)$. Найдем наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$s=3(700-10x-5y)=3(700-2(280-4y)-5y)=3(140+3y).$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение y. Из (*) ясно, что наибольшее возможное y равно 70, при этом $x=0$, $s=3(140+3\cdot 70)=1050$. Это означает, что 70 шахтеров второй шахты должны быть заняты на добыче алюминия, а оставшиеся 30 шахтеров второй шахты и все 20 шахтеров первой шахты должны быть заняты на добыче никеля. При этом они добудут 700 кг алюминия и 350 кг никеля, а масса сплава будет равна 1050 кг.

Задание 8 (ЕГЭ–2015)**.** Григорий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате, если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара; если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $4t$ единиц товара. За каждый час работы (на каждом из заводов) Григорий платит рабочему 500 рублей. Григорий готов выделять 5 000 000 рублей в неделю на оплату труда рабочих. Какое наибольшее количество единиц товара можно произвести за неделю на этих двух заводах?

Решение. Пусть на первом заводе работают суммарно x^2, а на втором — y^2 часов в неделю. Требуется найти максимум суммы $s=3x+4y$ при условии

$$500(x^2+y^2)=5\,000\,000\Leftrightarrow x^2+y^2=10\,000.\ (*)$$

Выразим y из первого соотношения $y=\frac{1}{4}(s-3x)$, подставим в (*), получим уравнение:

$$x^2+\left(\frac{1}{4}(s-3x)\right)^2=10\,000\Leftrightarrow 25x^2-(6s)x+\left(s^2-160\,000\right)=0.\ (**)$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант, а значит, и четверть дискриминанта:

$$\frac{D}{4}=9s^2-25\left(s^2-160\,000\right)\ge 0\Leftrightarrow -500\le s\le 500.$$

Тем самым, наибольшее возможное значение $s=3x+4y$ равно 500. Покажем, что оно достигается при натуральных значениях переменных: действительно, из (**) находим, что значению $s=500$ соответствует $x=60$, а тогда $y=80$.

Ответ: 500 единиц товара.

Примечание 1. Оптимизируемое значение искомой функции может достигаться при значениях аргумента, не удовлетворяющих смыслу задачи (см. например, задачи 3 и 4). Поэтому проверка достижимости экстремальной величины — неотъемлемая часть решения.

Примечание 2. Мы привели решение, доступное восьмиклассникам. Еще несколько способов нахождения максимальной величины в аналогичной ситуации разберем на примере следующего задания.

Примечание 3. Решающий задачу учащийся может привести такое рассуждение: «Очевидно, что все средства нужно использовать только на втором заводе: ограничений по мощности завода нет, а производительность там выше. Значит, $y^2 = 10\,000$, $y = 100$, а $s = 400$». Ясно, что это неверное рассуждение — наибольшее количество товара, как было показано выше, равно 500. В чем ошибка учащегося?

Дело в том, что в условиях рассматриваемой задачи производительность не является постоянной, она зависит от количества произведенного товара, причем с увеличением его количества производительность падает! Причина в том, что временные затраты на производство пропорциональны квадрату количества произведенного товара, а значит, производительность обратно пропорциональна корню из этого количества.

Поясним сказанное на конкретном примере: для производства 1 единицы товара на первом заводе необходимо затратить одну девятую часа (около 7 минут), а двух единиц — четыре девятых часа (около 27 минут); аналогично на втором заводе: одну единицу товара делают за одну шестнадцатую часа (около 4 минут), а две единицы — за час. Поэтому произвести две единицы товара по одной на каждом заводе эффективней, чем производить их на одном заводе.

Мы склонны считать, что в этом и следующих заданиях ЕГЭ «с практическим содержанием» описаны не самые реальные заводы и шахты.

Задание 9 (Задания ФИПИ для подготовки к ЕГЭ–2016)**.** В двух областях работают по 160 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 5 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,3 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Для нужд промышленности можно использовать или алюминий, или никель, причём 1 кг алюминия можно заменить 1 кг никеля. Какую наибольшую массу металлов можно добыть в двух областях суммарно для нужд промышленности?

Решение. Поскольку алюминий и никель взаимозаменяемы, и необходимо произвести наибольшее количество металла, все рабочие первой области должны быть направлены на добычу никеля, который они добывают втрое более эффективно, чем алюминий. За сутки ими будет добыто $160 \cdot 5 \cdot 0{,}3 = 240$ кг никеля.

Пусть во второй области алюминий добывают x рабочих, а никель — $160 - x$ рабочих. Тогда за сутки они добудут $\sqrt{5x}$ кг алюминия и $\sqrt{5(160 - x)}$ кг никеля. Найдем наибольшее значение функции

$$f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800 - 5x}$$

для натуральных x, не больших 160. Имеем:

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5x}} - \frac{5}{2\sqrt{800 - 5x}} = \frac{5}{2}\,\frac{\sqrt{800 - 5x} - \sqrt{5x}}{\sqrt{5x} \cdot \sqrt{800 - 5x}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{800 - 5x} = \sqrt{5x} \underset{x \in \mathbb{N}}{\Leftrightarrow} 800 - 5x = 5x \Leftrightarrow x = 80.$$

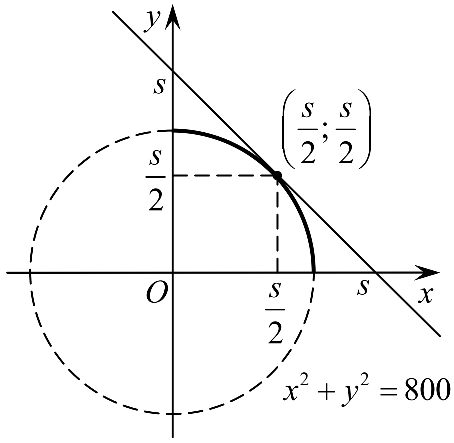
При x меньших 80 производная положительна, а при x больших 80 производная отрицательна, поэтому в точке 80 функция достигает максимума $f_{max} = 40$, равного наибольшему значению функции на исследуемом промежутке.

Тем самым, 80 рабочих второй области следует направить на добычу алюминия и 80 — на добычу никеля. Они добудут 40 кг металла. Совместно рабочие первой и второй области добудут 280 кг металла.

Ответ: 280 кг.

Примечание для знатоков. Можно было обойтись без производной. Напомним, что наибольшее значение функции $y(x) = \sqrt{x-a} + \sqrt{b-x}$, на отрезке $[a; b]$ достигается в точке $\frac{a+b}{2}$ и равно $\sqrt{2(b-a)}$. Доказательство можно получить, например, возведением в квадрат.

В нашем случае: $f(x) = \sqrt{5x} + \sqrt{800-5x}$, $a = 0$, $b = 800$, поэтому искомое наибольшее значение $f_{наиб} = \sqrt{1600} = 40$ достигается в точке, где $5x = 400$, то есть при $x = 80$.



Приведём геометрическое решение. Пусть во второй области на добычу алюминия будет отведено x^2 человеко-часов, а на добычу никеля — y^2 человеко-часов. Всего рабочих 160, работая по 5 часов, они вырабатывают 800 человеко-часов в сутки, поэтому $x^2 + y^2 = 800$. Для таких значений переменных требуется определить наибольшее значение количества добытого металла $s = x + y$. Тем самым, необходимо определить наибольшее значение параметра s, при котором прямая, задаваемая уравнением $y = s - x$, будет иметь с окружностью $x^2 + y^2 = 800$ общие точки, лежащие в первой координатной четверти.

Из рисунка видно, что точка касания является серединой гипотенузы равнобедренного прямоугольного треугольника. Координаты точки касания $(0{,}5s; 0{,}5s)$ должны удовлетворять уравнению окружности. Тогда $0{,}25s^2 + 0{,}25s^2 = 800$, откуда $s = 40$ при $x = y = 20$.

Ещё несколько идей. Пусть $ax^2 + by^2 = c$ (*) и необходимо найти наибольшее значение величины $s = dx + ey$ (**). Помимо использования производной или геометрических соображений, можно свести задачу к исследованию условия разрешимости квадратного уравнения (так была решена задача 6), к исследованию тригонометрического выражения и к исследованию скалярного произведения. Приведем эти способы для нашего случая: $x^2 + y^2 = 800$, $s = x + y$, и укажем, как поступать в общем случае.

Квадратное уравнение с параметром. Выражаем переменную y из соотношения (**), подставляем в (*), далее ищем, при каких значениях s полученное квадратное уравнение будет иметь решение. Имеем: $y = s - x$,

$$x^2 + (s-x)^2 = 800 \Leftrightarrow x^2 - sx + 0{,}5s^2 - 400 = 0.$$

Полученное уравнение имеет решения, если неотрицателен его дискриминант:

$$1600 - s^2 \geq 0 \Leftrightarrow -40 \leq s \leq 40.$$

В общем случае полностью аналогично.

Тригонометрия. Поскольку $x^2+y^2=800,$ можно положить $x=\sqrt{800}\cos t,$ $y=\sqrt{800}\sin t$ и исследовать на сумму $s=x+y,$ используя свойства тригонометрических функций:

$$s=\sqrt{800}\cos t+\sqrt{800}\sin t=\sqrt{800}(\cos t+\sin t)=\sqrt{800}\sqrt{2}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=40\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right).$$

Тем самым, s принимает все значения из отрезка $[40; 40]$.

В общем случае для случая положительных коэффициентов делением обеих частей уравнения $ax^2+by^2=c$ на c получают уравнение $\tilde{a}x^2+\tilde{b}y^2=1$ и вводят переменные $\sqrt{\tilde{a}}x$ и $\sqrt{\tilde{b}}y,$ сумма квадратов которых равна 1. Новые переменные можно считать косинусом и синусом одного и того же угла: $\cos t=\sqrt{\tilde{a}}x,$ $\sin t=\sqrt{\tilde{b}}y,$ откуда $x=\frac{1}{\sqrt{\tilde{a}}}\cos t,$ $y=\frac{1}{\sqrt{\tilde{b}}}\sin t.$ Тогда $s=dx+ey=\frac{d}{\sqrt{\tilde{a}}}\cos t+\frac{e}{\sqrt{\tilde{b}}}\sin t,$ и задача сводится к использованию формулы для вспомогательного угла:

$$A\sin x+B\cos x=\operatorname{sgn}A\cdot\sqrt{A^2+B^2}\sin\left(x+\operatorname{arctg}\frac{B}{A}\right),$$

откуда следует, что множеством значений s является отрезок $\left[-\sqrt{A^2+B^2};\ \sqrt{A^2+B^2}\right].$

Векторы. Введем вектор $(x;\ y)$. Из равенства $x^2+y^2=800,$ заключаем, что его длина равна $\sqrt{800}.$ Рассмотрим вектор $(1;\ 1),$ его длина равна $\sqrt{2}.$ Скалярное произведение векторов не больше произведения их длин, а случаю равенства соответствует сонаправленность векторов, тогда имеем:

$$(x;\ y)\cdot(1;\ 1)\le\sqrt{800}\sqrt{2}\Leftrightarrow x+y\le 40,$$

причем случаю $x+y=40$ соответствует пропорциональность координат: $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}.$ Итак, $s=40,$ причем $x=y=20.$

В общем случае для положительных значений коэффициентов равенство $ax^2+by^2=c$ понимается как длина вектора $(\sqrt{a}x;\ \sqrt{b}y),$ равная $\sqrt{c},$ и рассматривается вектор $\left(\frac{d}{\sqrt{a}};\ \frac{e}{\sqrt{b}}\right).$

Тогда справедливо неравенство

$$(\sqrt{a}x;\ \sqrt{b}y)\left(\frac{d}{\sqrt{a}};\ \frac{e}{\sqrt{b}}\right)=dx+ey\le c\sqrt{\frac{d^2}{a}+\frac{e^2}{b}},$$

причем равенству соответствует пропорция $\frac{a}{d}x=\frac{b}{e}y.$ Это дает оценку на наибольшее значение исследуемой величины. Попутно заметим, что в силу справедливости двойного неравенства $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\le\vec{a}\vec{b}\le|\vec{a}||\vec{b}|$ найдено и наименьшее значение величины s, оно противоположно наибольшему.

Рассмотрим еще две задачи.

Задание 10 (Задания ФИПИ для подготовки к ЕГЭ–2016)**.** В двух областях есть по 20 рабочих, каждый из которых готов трудиться по 10 часов в сутки на добыче алюминия или никеля. В первой области один рабочий за час добывает 0,1 кг алюминия или 0,1 кг никеля. Во второй области для добычи x кг алюминия в день требуется x^2 человеко-часов труда, а для добычи y кг никеля в день требуется y^2 человеко-часов труда.

Обе области поставляют добытый металл на завод, где для нужд промышленности производится сплав алюминия и никеля, в котором на 3 кг алюминия приходится 1 кг никеля. При этом области договариваются между собой вести добычу металлов так, чтобы завод мог произвести наибольшее количество сплава. Сколько килограммов сплава при таких условиях ежедневно сможет произвести завод?

Решение. Пусть в первой области x рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-x$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, один рабочий добывает 1 кг алюминия или 1 кг никеля, поэтому за сутки рабочие добудут x кг алюминия и $(20-x)$ кг никеля.

Пусть во второй области y рабочих заняты на добыче алюминия, а $20-y$ рабочих заняты на добыче никеля. Работая 10 часов в сутки, n рабочих добывают $\sqrt{10\cdot n}$ кг любого из металлов, поэтому вместе бригады добудут $\sqrt{10y}$ кг алюминия и $\sqrt{10(20-y)}$ кг никеля.

Всего будет произведено $x+\sqrt{10y}$ кг алюминия (1) и $20-x+\sqrt{200-10y}$ кг никеля (2). Поскольку алюминия необходимо добывать втрое больше никеля, имеем:

$$x+\sqrt{10y}=3(20-x+\sqrt{200-10y})\Leftrightarrow 4x=60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}\quad (*)$$

Количеству никеля $s=20-x+\sqrt{200-10y}$ соответствует количество сплава $4s$. Будем искать наибольшее возможное значение этого выражения, подставив в него (*):

$$4s=80-4x+4\sqrt{200-10y}=80-(60+3\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y})+4\sqrt{200-10y}=$$
$$=20+\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}.$$

Наибольшему возможному значению s соответствует наибольшее значение функции $f(y)=\sqrt{10y}+\sqrt{200-10y}$ при натуральных y не больших 20.

Имеем:

$$f'(y)=\frac{5}{\sqrt{10y}}-\frac{5}{\sqrt{200-10y}}=5\cdot\frac{\sqrt{200-10y}-\sqrt{10y}}{\sqrt{200-10y}\cdot\sqrt{10y}}.$$

Найдем нули производной:

$$\sqrt{200-10y}=\sqrt{10y}\underset{y\in\mathbb{N}}{\Leftrightarrow}200-10y=10y\Leftrightarrow y=10.$$

В найденной точке производная меняет знак с плюса на минус, поэтому в ней функция достигает максимума, совпадающего с наибольшим значением функции на исследуемой области.

Далее имеем: $f(10)=20$, $4s=120$, $s=30$, из (*) $x=20$. Это означает, что все рабочие первой области должны быть заняты на производстве алюминия, за сутки они произведут его 20 кг, а рабочие второй области бригадами по 10 и 10 человек должны быть заняты на добыче алюминия и никеля, они добудут их по 10 кг. Всего будет добыто 30 кг алюминия и 10 кг никеля, из них будет произведено 40 кг сплава.

Задание 11 (Пробный ЕГЭ–2015, Санкт-Петербург)**.** Фабрика, производящая пищевые полуфабрикаты, выпускает блинчики со следующими видами начинки: ягодная и творожная. В данной ниже таблице приведены себестоимость и отпускная цена, а также производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта.

Вид начинки	**Себестоимость (за 1 тонну)**	**Отпускная цена (за 1 тонну)**	**Производственные возможности**
ягоды	70 тыс. руб.	100 тыс. руб.	90 (тонн в мес.)
творог	100 тыс. руб.	135 тыс. руб.	75 (тонн в мес.)

Для выполнения условий ассортиментности, которые предъявляются торговыми сетями, продукции каждого вида должно быть выпущено не менее 15 тонн. Предполагая, что вся продукция фабрики реализуется без остатка, найдите максимально возможную прибыль, которую может получить фабрика от производства блинчиков за 1 месяц.

Решение. Пусть x — доля мощностей завода, занятых под производство блинчиков с ягодной начинкой, а y — доля мощностей, занятых под производство блинчиков с творожной начинкой. Тогда $x+y=1,$ при этом блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн. Кроме того, из условия ассортиментности следует, что $90x \geq 15,$ откуда $x \geq \frac{1}{6},$ а $75y \geq 15,$ откуда $y \geq \frac{1}{5}.$ Прибыль завода с одной тонны продукции с ягодной начинкой равна 30 тыс. руб., прибыль с одной тонны продукции с творожной начинкой равна 35 тыс. руб., общая прибыль с произведённой за месяц продукции равна $30 \cdot 90x + 35 \cdot 75y = 2700x + 2625y = 75 \cdot (36x + 35y).$ Таким образом, необходимо найти наибольшее значение выражения $75 \cdot (36x + 35y)$ при выполнении условий:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x \geq \frac{1}{6}, \; y \geq \frac{1}{5}, \end{cases}$$

откуда $y = 1 - x$, $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ (*).

Подставляя $y = 1 - x$ в выражение $36x + 35y$ получаем: $36x + 35(1 - x) = x + 35.$ Наибольшее значение этого выражения при условии $\frac{1}{6} \leq x \leq \frac{4}{5}$ достигается при $x = \frac{4}{5}$, тогда из (*) находим $y = \frac{1}{5}.$

Поэтому искомая максимально возможная прибыль завода за месяц равна:

$$75 \cdot \left(36 \cdot \frac{4}{5} + 35 \cdot \frac{1}{5}\right) = 75 \cdot \frac{179}{5} = 2685 \text{ тыс. руб.}$$

при этом фабрика производит 72 тонны блинчиков с ягодной начинкой и 15 тонн блинчиков с творожной начинкой.

Ответ: 2685 тыс. руб.

Приведём арифметическое решение. Заметим, что тонна блинчиков с творожной начинкой приносит 35 тыс. руб. прибыли, а тонна блинчиков с ягодной — 30 тыс. руб. прибыли. При этом 1 тонне блинчиков с творожной начинкой соответствует 1,2 тонны блинчиков с ягодной начинкой. Заметим, что $1\text{ т} \cdot 35 \text{ тыс. руб.} < 1{,}2\text{ т} \cdot 30 \text{ тыс. руб.} = 36\text{ т} \cdot \text{тыс. руб.}$, поэтому более выгодно производить блинчики с ягодной начинкой. Значит, блинчиков с творожной начинкой необходимо производить 15 тонн, а блинчиков с ягодной начинкой — $90 - 15 \cdot 1{,}2 = 72$ тонны, что даст $15 \cdot 35 + 72 \cdot 30 = 2685$ тыс. руб. прибыли.

Примечание. Внимательный читатель отметит, что условие задачи, строго говоря, некорректно: в нем указаны производственные возможности фабрики по каждому виду продукта при полной загрузке всех мощностей только данным видом продукта. Про производственные возможности при выпуске обоих видов продукции одновременно в условии ничего не сказано. Авторам следовало бы указать, что за единицу времени фабрика может выпустить или m блинчиков с ягодной начинкой или $1{,}2m$ блинчиков с творожной начинкой. Иначе фраза «если $x+y=1$, то блинчиков с ягодной начинкой производится $90x$ тонн, а с творожной начинкой — $75y$ тонн» не следует из условия; ее нам пришлось «додумать» за авторов задачи.

Если наш читатель обращает внимание на такие детали и сумеет научить этому своих учащихся, мы будем считать нашу задачу выполненной.

Домашнее задание к занятию 4

1. Подготовить краткое сообщение на одну из тем, обсужденных на занятии, или на смежную тему. Например, «Экстремальные задачи», «Примеры задач линейного программирования» и др.

2. На сайте РЕШУ ЕГЭ решить вариант http://reshuege.ru/test?id=9267349 с упражнениями по теме.

3. На сайте Московской олимпиады школьников по экономике решить задания заключительного тура за 2014 год http://mosecon.olimpiada.ru/arch_tasks.

4. Придумать или подобрать из различных источников 5 задач экономического содержания по пройденному материалу. Обменяться задачами с товарищами и решить их.

5. Написать на каком-либо языке программирования программу для решения какой-либо экстремальной задачи. Или написать программу-калькулятор доходности вкладов с учетом капитализации. Параметры задачи задать самостоятельно, значения считать вводимыми с клавиатуры или считывать из текстового файла, если этот материал уже изучался на уроках информатики. Если программирование не изучалось, решить задачу в электронной таблице Excel или аналогичной.